

Θεωρία Αριθμών

Παρασκευή 6 Σεπτεμβρίου 2019

1. (1,5 μονάδες) Δείξτε ότι αν p περιττός πρώτος αριθμός τότε

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} + p^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$$

και

$$1^p + 2^p + \dots + (p-1)^p + p^p \equiv 0 \pmod{p}.$$

2. (1 μονάδα) Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της Διοφαντικής εξίσωσης

$$143x + 308y = 191,$$

ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις.

3. (1 μονάδα) Να λύσετε για μιγαδικό z την εξίσωση:

$$z^6 + 5z^3 + 4 = 0.$$

4. (1 μονάδα) Δείξτε ότι $\mu.κ.δ.(2^{2019} + 3^{2019}, 2^{2020} + 3^{2020}) = 1$.
5. (1 μονάδα) Δείξτε ότι το 31 διαιρεί το $4(29!) + 5!$.
6. (1 μονάδα) Βρείτε την γραφή στο 7-αδικό σύστημα αρίθμησης του 2019.
7. (1 μονάδα) Δείξτε, χωρίς χρήση του Θεωρήματος που περιγράφει τα $n \in \mathbb{N}$ για τα οποία υπάρχουν αρχικές ρίζες, ότι δεν υπάρχουν αρχικές ρίζες $\pmod{16}$.
8. (1 μονάδα) Δίνεται ότι το 3 είναι αρχική ρίζα $\pmod{17}$. Βρείτε όλους τους ακέραιους από το 17 μέχρι και το 33 που είναι αρχικές ρίζες $\pmod{17}$.
9. (1,5 μονάδες) Να λυθεί το σύστημα

$$3x \equiv 2 \pmod{11}$$

$$2x \equiv 1 \pmod{13}$$

$$3x \equiv 4 \pmod{17}.$$

Καλή επιτυχία.